

Die Binomialverteilung

Beispiel:

Eine Urne enthält 10 weiße und 20 schwarze Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der schwarzen Kugeln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .

$$n=3 \quad p=\frac{2}{3}$$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,01235	0,09877	0,29630	0,39506	0,19753

Definition:

Die Zufallsgröße X , die die Anzahl der Treffer bei einer Bernoulli-Kette der Länge n mit der Trefferwahrscheinlichkeit p angibt, heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p . Ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung.

$$\text{Es gilt: } P(X=k) = B(n;p;k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung:

Eine Zufallsvariable X mit dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung nennt man kurz eine $B(n;p)$ verteilte Zufallsgröße.

Erwartungswert und Varianz einer binomial verteilten Zufallsgröße:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Die summierte Binomialverteilung

Beispiel:

Eine Urne enthält 10 weiße und 20 schwarze Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der schwarzen Kugeln.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei schwarze Kugeln gezogen werden.

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X \leq 2) = B\left(4; \frac{2}{3}; 0\right) + B\left(4; \frac{2}{3}; 1\right) + B\left(4; \frac{2}{3}; 2\right) = 0,01235 + 0,09877 + 0,29630 = 0,40742$$

Ist X eine binomialverteilte Zufallsgröße mit den Parametern n und p , so gilt für die Wahrscheinlichkeit höchstens k Treffer zu erzielen

$$P(X \leq k) = F_p^n(k) = B(n; p; 0) + B(n; p; 1) + \dots + B(n; p; k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Die entsprechende Verteilung wird summierte Binomialverteilung genannt.

Aufgaben:

1.0 Ein Würfel wird sechsmal geworfen.

Die Zufallsgröße X ist die Anzahl der auftretenden Sechser.

1.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X . ☐

1.2 Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$ der Zufallsgröße X . ☐

1.3 Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: ☒

$$P(X \leq 4); P(X > 2); P(1 < X \leq 4); P(2 \leq X \leq 5); P(X < 3)$$

2.0 Begründen Sie, ob die folgenden Behauptungen richtig oder falsch sind. ☒

2.1 $F_p^n(0) = B(n; p; 0)$

2.2 $F_p^n(2) = B(n; p; 1) + B(n; p; 2)$

2.3 $F_p^n(n) = 1$

3.0 Ein Blumenhändler gibt für eine seltene Pflanze eine Keimgarantie von 70 %.
Ein Kunde bestellt 25 Blumenzwiebeln.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der

3.1 alle 25 Blumenzwiebeln keimen. ☐

3.2 mindestens 20 Blumenzwiebeln keimen. ☒

3.3 mehr als 16, aber weniger als 22 Blumenzwiebeln keimen. ☒

Lösungen zu den Aufgaben:

1.1

x_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,33490	0,40188	0,20094	0,05358	0,00804	0,00064	0,00002

1.2

$$E(X) = n \cdot p = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{5}{6}} \approx 0,91$$

1.3

$$P(X \leq 4) = 0,99934$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,93771 = 0,06229$$

$$P(1 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 1) = 0,99934 - 0,73678 = 0,26256$$

$$P(2 \leq X \leq 5) = P(X \leq 5) - P(X \leq 1) = 0,99998 - 0,73678 = 0,2632$$

$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = 0,93771$$

2.1 Richtig. Die Wahrscheinlichkeit für höchstens null Treffer ist gleich mit der Wahrscheinlichkeit für null Treffer.

2.2 Falsch. Es fehlt $B(n; p; 0)$.

2.3 Richtig. Das Ereignis „höchstens n Treffer bei n Versuchen“ ist das sichere Ereignis.

$$3.1 \quad P(X = 25) = 0,7^{25} = 0,00013$$

$$3.2 \quad P(X \geq 20) = 1 - F_{0,7}^{25}(19) = 0,19349$$

$$3.3 \quad P(16 < X < 22) = F_{0,7}^{25}(21) - F_{0,7}^{25}(16) = 0,64369$$